

Exercices – Séquence n° 8 – FONCTIONS (III) : continuité, TVI

Contenus	- Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. - Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. - Image d'une suite convergente par une fonction continue. - Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.
Capacités	- Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement. - Pour une fonction f continue d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. - Exemples d'algorithme : méthode de dichotomie, méthode de Newton, méthode de la sécante.

COMPÉTENCES :

Ch : CHERCHER

Mo : MODÉLISER

Re : REPRÉSENTER

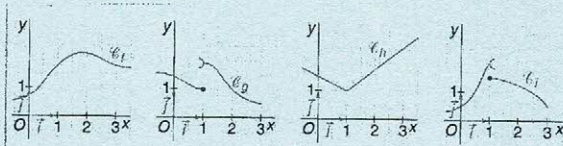
Ra : RAISONNER

Ca : CALCULER

Co : COMMUNIQUER

Exercice 1 [Re]

Les fonctions f, g, h et i sont données par leur courbe représentative dans un repère orthonormé.



- Ces fonctions sont-elles continues sur l'intervalle $[0; 2]$?
- Ces fonctions sont-elles continues sur l'intervalle $[1; 2]$?
- Ces fonctions sont-elles dérivables sur l'intervalle $[0; 2]$?

Exercice 2 [Ra-Co]

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 6]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3 & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{si } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur l'intervalle $[-3; 6]$? Justifier.

Exercice 3 [Ra-Co]

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \leq -1 \\ ax + b & \text{si } -1 < x < 3 \\ x^3 - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 [Ra-Co]

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x > k \\ \frac{1}{e^x} & \text{si } x \leq k \end{cases}$ où k est un réel strictement positif.

Existe-t-il une valeur de k pour laquelle la fonction h est continue sur $]0; +\infty[$?

Exercice 5 [Ra-Co]

La fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$?

Exercice 6 [Ra-Co]

On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction f .
Discuter, suivant les valeurs du réel k , le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = k$.

x	$-\infty$	-2	2	5	$+\infty$
$f(x)$	6	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		0	$+\infty$	3	0

Exercice 7 [Ra-Ca-Co]

On a modélisé le bénéfice hebdomadaire d'une entreprise par la fonction B définie sur $[0; 12]$ par :

$$B(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 40$$

où x représente la quantité d'objets vendus en **dizaines** et $B(x)$ représente le bénéfice réalisé en **dizaines** d'euros.

- Étudier les variations de la fonction B sur $[0; 12]$.
- En déduire la quantité d'objets vendus, arrondie à l'unité près, pour que le bénéfice soit maximal et donner ce bénéfice maximal.
- Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans l'intervalle $[0; 12]$ et donner un encadrement au dixième de α et β .
- En déduire la plage de rentabilité de l'entreprise.
- Étudier la convexité de la fonction B sur $[0; 12]$.
- Interpréter le point d'inflexion trouvé dans le contexte de l'exercice.

Exercice 8 [Ra-Ca-Co]**Partie A - Étude d'une fonction**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

- Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f .
- Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis montrer que, pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$.
- Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ et dresser le tableau complet de variations de f .
- Soit m un nombre réel.
Sans justifier, donner, en fonction des valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
- Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis montrer que, pour tout réel x non nul, $f''(x) = \frac{e^{-x}(x^2 + 2x + 2)}{x^3}$.
- En déduire la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B - Tangente à une courbe

On note Δ la droite d'équation $y = -x$.

L'objectif de cette partie est de déterminer le nombre de points de C_f en lesquels la tangente à C_f est parallèle à Δ .

- Soit A un éventuel point de C_f en lequel la tangente à la courbe C_f est parallèle à Δ . On note a son abscisse.
Montrer que a est solution de l'équation $e^{-x}(-x-1) + x^2 = 0$.
- On pose, pour tout réel x , $g(x) = e^{-x}(-x-1) + x^2$.
Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de g .
- Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Exercice 9 [Ra-Ca-Co]

Dans un laboratoire, des scientifiques ont étudié pendant 10 ans l'effet de la pollution sur une population d'insectes par crainte d'extinction. L'étude, effectuée sur un échantillon de 25 000 insectes, montre que leur nombre diminue très rapidement lors des quatre premières années.

La population peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $f(t) = 25 e^{-0.5t}$, où t est le temps exprimé en années et $f(t)$ le nombre d'insectes exprimé en milliers.



- Calculer le pourcentage de baisse, arrondi à 1% près, du nombre d'insectes la première année.
- Après de longues recherches, un biologiste a mis au point un traitement pour essayer de sauver cette espèce. Ce traitement est administré aux insectes à partir de la quatrième année. L'évolution de la population est alors modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[4; 10]$ par :

$$g(t) = 20 e^{-0.1t^2} + t - 4,65$$

- Montrer que la fonction g est convexe sur l'intervalle $[4; 10]$.
- En déduire les variations de la fonction g' , dérivée de la fonction g .
- Montrer que l'équation $g'(t) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[4; 10]$ et en donner une valeur approchée au dixième.
- Déduire de ce qui précède le signe de la fonction g' puis les variations de la fonction g .
- Que peut-on penser quant à l'effet du traitement sur la population d'insectes ?

Exercice 10 [Ra-Ca-Co]

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -4x^3 - 3x^2 - 2$.

- Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Étudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau complet de variations
- À l'aide de la calculatrice, conjecturer le nombre de solutions à l'équation $g(x) = 0$ puis donner un encadrement par deux entiers successifs de chacune d'elles.
- On considère la fonction Python `dichotomie(a,b)` ci-contre :

```
def dichotomie(a,b,e):
    while abs(b-a)>e:
        m=(a+b)/2
        if g(a)*g(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return a,b
```

- On saisit `dichotomie(-2, -1, 0.01)` dans une console. Compléter le tableau suivant pour retracer l'exécution pas à pas de cette instruction :

Condition $ b - a > e$	m	Condition $g(a) \times g(m) < 0$	a	b
Vraie	-1,5	Fausse		

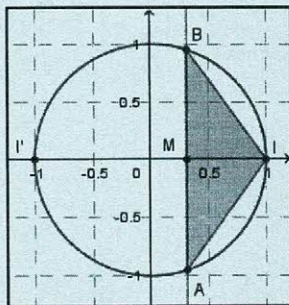
- Quel est le rôle de cette fonction `dichotomie` ?
 - Modifier cette fonction afin qu'elle prenne en argument les réels a , b et e et qu'elle renvoie un encadrement d'amplitude au plus e de la solution α de l'équation $g(x) = 0$.
 - Exécuter `dichotomie(-2,-1,0.001)`, puis donner une valeur approchée à 10^{-3} près de α .
- En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
 - Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $-\frac{3}{8}$.
 - Étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction g par rapport à T .
 - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x^3-1}$
 - Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et interpréter graphiquement les résultats.
 - Étudier les variations de la fonction f sur son domaine de définition.

Exercice 11 [Mo-Ra-Ca-Co]

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique dont une équation cartésienne est : $x^2 + y^2 = 1$.

Soit M un point mobile du segment $[I'I]$, où $I'(-1; 0)$ et $I(1; 0)$, distincts des extrémités du segment. On note x l'abscisse du point M.

La perpendiculaire en M à l'axe des abscisses coupe le cercle en deux points A et B.



- Exprimer, en fonction de x , l'aire du triangle ABI.
- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1; 1[$ par :

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$
 Étudier les variations de la fonction f .
- Où doit se situer le point M pour que l'aire du triangle ABI soit maximale ? Quelle est alors sa nature ?
- Démontrer que l'aire du triangle ABI est égale à 1 pour deux positions distinctes du point M.
- Pour l'une de ces positions, l'abscisse n'est pas entière. En déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

Exercice 12 [Ch-Ra-Ca-Co]

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme. Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5 \mu\text{g/mL}$. Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera, dans la suite, la modélisation suivante : $f(t) = 3t e^{-\frac{1}{4}t} + 2$ avec $t \geq 0$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine, exprimé en $\mu\text{g/mL}$, dans le sang en fonction du temps t , exprimé en minutes, écoulé après le début de l'hémorragie.

- Justifier que, douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang est anormal.
- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter concrètement ce résultat.
- Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ puis dresser le tableau complet de variations.
- A quel instant le taux vasopressine est-il maximal ? Quel est alors ce taux à $10^{-2} \mu\text{g/mL}$ près ?
- Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à l'intervalle $[0; 4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.
 À l'aide de la calculatrice, en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
- Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à $2,5 \mu\text{g/mL}$ dans le sang.

Exercice 13 [Ch-Ra-Ca-Co]

Montrer que l'équation (E) : $e^{-2x+1} = 2x + 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14 [Ra-Ca-Co]

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$

- Étudier les variations de la fonction g .
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
- En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

- Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction f .
- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Montrer que : $\forall x \in I, f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$. Dresser alors le tableau de variations de f .
- Démontrer que le point A de C_f d'abscisse α a pour ordonnée : $f(\alpha) = \frac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$

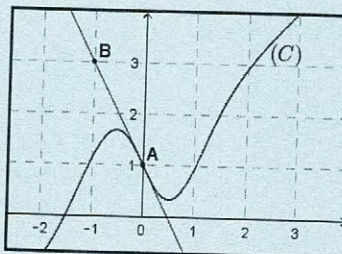
Exercice 15 [Ch-Mo-Ra-Ca-Co]

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé d'origine O :

- une courbe (C) représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 + axe^{-x^2} \quad \text{où } a \text{ est un réel ;}$$

- et la droite (AB) où $A(0; 1)$ et $B(-1; 3)$.



- Justifier que la courbe (C) passe par le point A.
 - Déterminer par le calcul le coefficient directeur de (AB).
 - Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.
 - On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe (C) au point A. Démontrer que $a = -3$.

- Dorénavant, pour tout réel x , $f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$ et $f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.

- Étudier le signe de $(2x^2 - 1)$ et en déduire que pour tout réel x inférieur ou égal à -1 , $f'(x) > 0$.
- Prouver qu'il existe une unique valeur nommée α de $[-\frac{3}{2}; -1]$ telle que $f(\alpha) = 0$.

- Voici un algorithme où les variables b, c et m sont des nombres réels.

- Avant l'exécution de cet algorithme, les variables b et c contiennent respectivement les valeurs -2 et -1 . Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

On justifiera en recopiant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

```

Tant que  $c - b > 0,1$ 
   $m \leftarrow \frac{b + c}{2}$ 
  Si  $f(m) \times f(b) > 0$ 
    alors
       $b \leftarrow m$ 
    sinon
       $c \leftarrow m$ 
  FinSi
FinTantque
Afficher  $b$  et  $c$ 
  
```

m	b	c	$c - b$
	-2	-1	1
-1,5			
...	...	...	...

- Que permettent ces deux valeurs obtenues en fin d'algorithme ?

4) Restitution organisée des connaissances :

Pré-requis : on admet que pour tout réel strictement positif x , $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$

- Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x}$.
- Application. Démontrer que pour tout réel x non nul,

$$f(x) = x + 1 - 3\frac{x^2 e^{-x^2}}{x}, \text{ puis en déduire la limite de } f(x) \text{ en } -\infty.$$

Pour réviser

Exercice 16 [Ra-Ca-Co]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x$$

- Justifier l'affichage ci-contre obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel :
- En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions qu'on notera α et β ($\alpha < \beta$).
- À l'aide la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α d'amplitude 10^{-2} .

Calcul formel	
1	FactoriseCl(Dérivée(3*x^4-8*x^3-6*x^2+24*x))
	→ 12 (x - 2) (x - 1) (x + 1)

Exercice 17 [Re-Ra-Co] N°71 p131**Exercice 18** [Ra-Ca-Co]

On a modélisé le bénéfice hebdomadaire d'une entreprise par la fonction B définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$B(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5,5x^2 + 6x - 20 \quad \text{où :}$$

- x représente la quantité d'objets vendus en dizaines ;
 - $B(x)$ représente le bénéfice réalisé en dizaines d'euros.
- Justifier que $B'(x) = -2x^2 + 11x + 6$; puis étudier les variations de la fonction B sur $[0 ; 10]$.
 - En déduire la quantité d'objets vendus pour que le bénéfice soit maximal et donner ce bénéfice maximal.
 - Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $[0 ; 10]$.
 - Déterminer un encadrement au dixième de α et β .
 - En déduire la quantité minimale et de la quantité maximale d'objets que doit vendre l'entreprise pour que son activité soit rentable.
 - Étudier la convexité de la fonction B sur $[0 ; 10]$.
 - Interpréter le point d'inflexion trouvé dans le contexte de l'exercice.

Exercice 19 [Ch-Mo-Ra-Ca-Co]**Partie A – Étude d'une fonction**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 + 2x - 2$

- Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
- Étudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau complet de variations.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution qu'on notera α puis, à l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.
- En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B – Application géométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et A le point de coordonnées $(1; 0)$. L'objet de cette partie est de déterminer le point B de la parabole $\mathcal{P}$ qui est le plus proche de A.

Dans ce but, on pose, pour tout réel x , $f(x) = AM$ où M est le point de la parabole $\mathcal{P}$ d'abscisse x .

- Exprimer $f(x)$ en fonction de x .
- Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- En déduire l'existence et l'unicité du point B puis donner un encadrement d'amplitude 0,01 de son abscisse b .

Exercice 20**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - 2x - 3$.

- 1) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Étudier les variations de la fonction g .
- 3) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ qu'on nommera α et β ($\alpha < \beta$).
- 4) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de α et β .
- 5) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 5)(1 + e^{-x})$.

- 6) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 7) Étudier les variations de la fonction f (On pourra s'aider de la partie A).
- 8) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 5)]$. Comment interpréter graphiquement le résultat ?

Pour aller plus loin

Exercice 21 [Ra-Co]

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 22 [Ra-Co]

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ où k est un réel.

Existe-t-il une valeur de k pour laquelle la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 23 [Ch-Ra-Ca-Co]

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0; 1]$ à valeurs dans l'intervalle $[0; 1]$.
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$.

EXERCICE 10 : PROGRAMMATION CALCULATRICES CASIO / TI

CASIO	TI
<pre> "A=" ? → A "B=" ? → B "E=" ? → E While abs(B-A)>E (A+B)/2→M If Y₁(M)×Y₁(A)<0 Then M→B Else M→A IfEnd WhileEnd A■ B■ </pre>	<pre> Input "A", A Input "B", B Input "E", E While abs(B-A)>E (A+B)/2→M If Y₁(M)*Y₁(A)<0 Then M→B Else M→A End End Disp A Disp B </pre>

Pour obtenir Y₁,

- CASIO fonction stockée en Y₁ du menu graph ou table : SHIFT Catalog Y(GRAPH) ;
- TI fonction stockée en Y₁ du menu graph : VARS Y-VARS FONCTION.